

## 2.1. POJĘCIE FUNKCJI

### Definicja funkcji

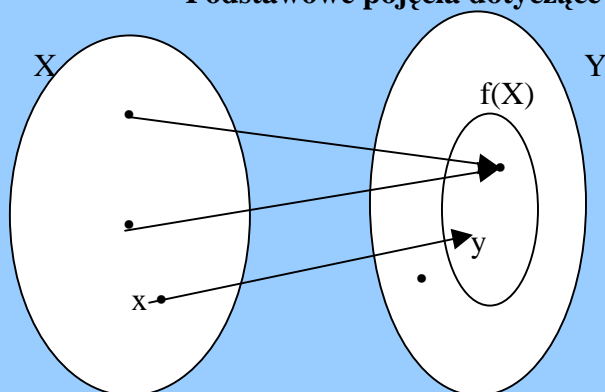
Funkcję  $f$  ze zbioru  $X$  w zbiór  $Y$  nazywamy przyporządkowanie, które każdemu elementowi  $x \in X$  przyporządkowuje dokładnie jeden element  $y \in Y$ .

$f : X \rightarrow Y$  - odwzorowanie zbioru  $X$  w zbiór  $Y$

Najczęściej stosowane sposoby określania funkcji to:

- opis słowny
- tabelka
- zbiór par uporządkowanych
- graf
- wzór
- wykres

### Podstawowe pojęcia dotyczące funkcji



$x$  – argument funkcji  $f$

$y = f(x)$  – wartość funkcji  $f$  dla argumentu  $x$

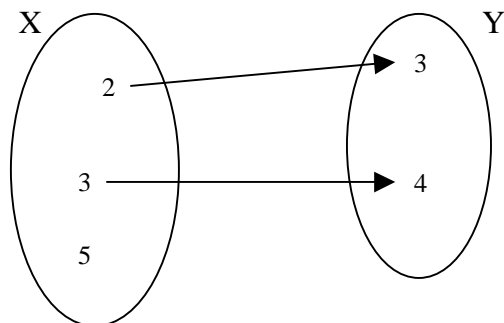
$X$  – zbiór argumentów funkcji  $f$  (dziedzina funkcji  $f$  - oznaczenie  $D$ )

$Y$  – przeciwdziedzina funkcji  $f$

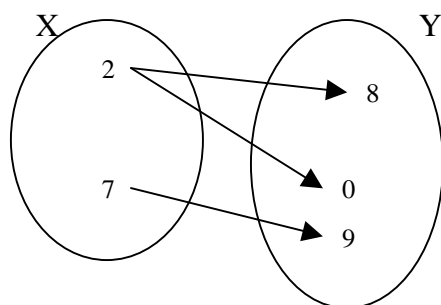
$f(X)$  – zbiór wartości funkcji  $f$

Przykład 2.1.1. Który graf przedstawia funkcję ? Dla funkcji podaj jej dziedzinę i zbiór wartości.

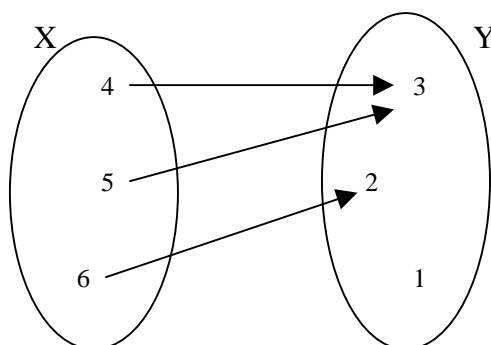
a)



b)



c)



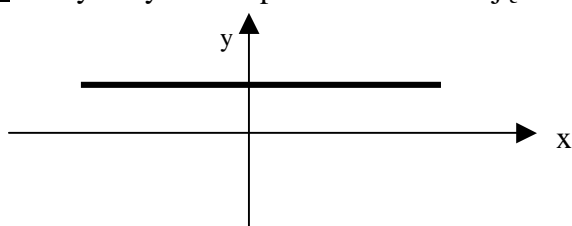
Rozwiązanie	Komentarz
<p>Odp. Tylko graf z podpunktu c) jest funkcją.</p> <p>Dziedzina : <math>D : x \in \{4,5,6\}</math>                      Zbiór wartości: <math>y \in \{2,3\}</math></p>	<p>Graf z podpunktu a) nie jest funkcją , bo 5 nie jest przyporządkowany żaden element.</p> <p>Graf z podpunktu b) nie jest funkcją , bo 2 są przyporządkowane dwa elementy 8 i 0.</p> <p>W grafie z podpunktu c) każdemu elementowi ze zbioru X jest przyporządkowany dokładnie jeden element ze zbioru Y:  <math>4 \rightarrow 3</math>  <math>5 \rightarrow 3</math>  <math>6 \rightarrow 2</math>                      zatem ten graf opisuje funkcję.</p> <p>Do dziedziny należą wszystkie elementy zbioru X. Do zbioru wartości należą wszystkie elementy zbioru Y, które mają przyporządkowanie.</p>

## Wykres funkcji

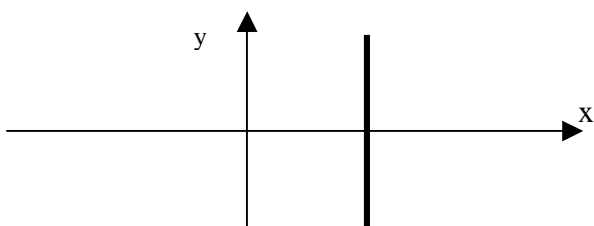
- a) **Wykresem funkcji**  $f : X \rightarrow Y$  jest zbiór punktów płaszczyzny o współrzędnych  $(x, f(x)); x \in X$
- b) Żadna prosta pionowa nie może przecinać wykresu funkcji w więcej niż jednym punkcie.

Przykład 2.1.2. Który z wykresów przedstawia funkcję?

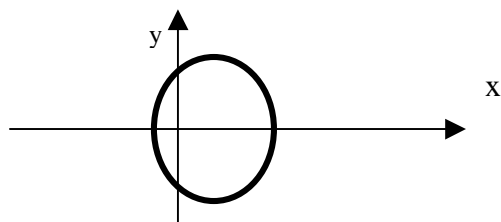
a)



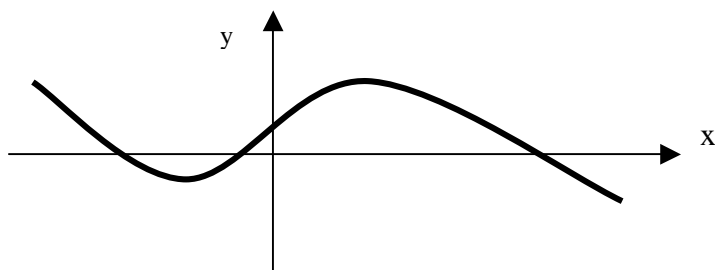
b)



c)



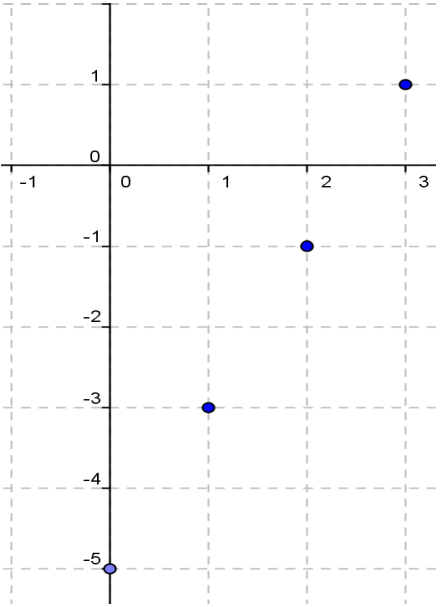
d)



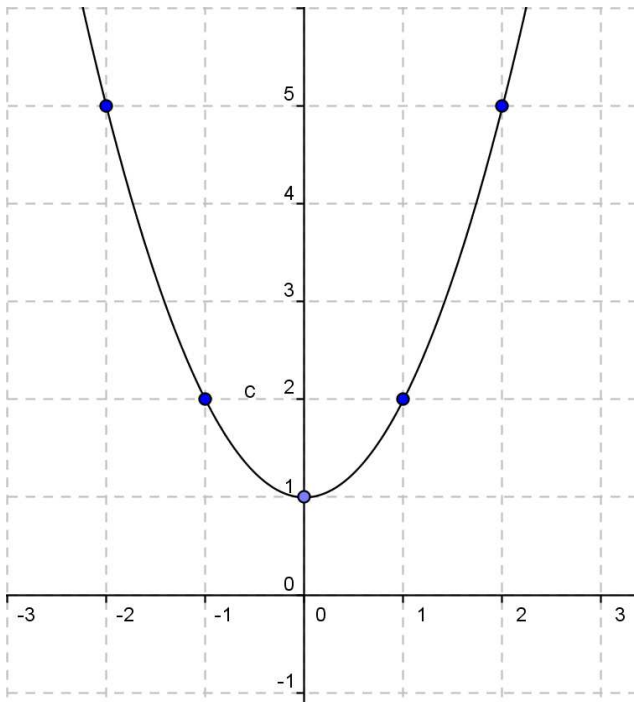
Rozwiązanie	Komentarz
<p>Odp. Rysunki z podpunktów a) i d) przedstawiają wykresy funkcji.</p>	<p>Do wykazania, który wykres jest wykresem funkcji wykorzystujemy stwierdzenie: Żadna prosta pionowa nie może przecinać wykresu funkcji w więcej niż jednym punkcie.</p> <p>Dla rysunku z podpunktu b) prosta pionowa pokrywająca się z wykresem, ma z nim nieskończenie wiele punktów wspólnych.</p> <p>Dla rysunku z podpunktu c) prosta pionowa przecina wykres w dwóch punktach.</p>

**Przykład 2.1.3.** Narysuj wykres funkcji podanej wzorem. Z wykresu odczytaj dziedzinę i zbiór wartości.

a)  $y = 2x - 5 \quad x \in \{0,1,2,3\}$

Rozwiązanie	Komentarz										
<table border="1" style="margin-bottom: 10px;"> <tr> <td style="text-align: center;"><b>x</b></td> <td style="text-align: center;">0</td> <td style="text-align: center;">1</td> <td style="text-align: center;">2</td> <td style="text-align: center;">3</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;"><b>y</b></td> <td style="text-align: center;">-5</td> <td style="text-align: center;">-3</td> <td style="text-align: center;">-1</td> <td style="text-align: center;">1</td> </tr> </table> <p> <math>y = 2 \cdot 0 - 5 = -5</math>  <math>y = 2 \cdot 1 - 5 = -3</math>  <math>y = 2 \cdot 2 - 5 = -1</math>  <math>y = 2 \cdot 3 - 5 = 1</math> </p>	<b>x</b>	0	1	2	3	<b>y</b>	-5	-3	-1	1	<p>Funkcję przedstawiamy przy pomocy tabelki. Wartości funkcji <math>y</math> obliczamy wstawiając kolejne argumenty <math>x</math> do wzoru funkcji.</p>
<b>x</b>	0	1	2	3							
<b>y</b>	-5	-3	-1	1							
	<p>Wyznaczone punkty z tabelki zaznaczamy w układzie współrzędnym.</p>										
<p>Dziedzina: <math>D : x \in \{0,1,2,3\}</math>  Zbiór wartości: <math>y \in \{-5,-3,-1,1\}</math></p>	<p>Z wykresu odczytujemy dziedzinę i zbiór wartości.</p>										

b)  $y = x^2 + 1$

Rozwiązanie						Komentarz												
<table border="1"> <tr> <td><b>x</b></td> <td>-2</td> <td>-1</td> <td>0</td> <td>1</td> <td>2</td> </tr> <tr> <td><b>y</b></td> <td>5</td> <td>2</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>5</td> </tr> </table> <p> <math>y = (-2)^2 + 1 = 5</math>  <math>y = (-1)^2 + 1 = 2</math>  <math>y = 0^2 + 1 = 1</math>  <math>y = 1^2 + 1 = 2</math>  <math>y = 2^2 + 1 = 5</math> </p>						<b>x</b>	-2	-1	0	1	2	<b>y</b>	5	2	1	2	5	<p>Funkcję przedstawiamy przy pomocy tabelki częściowej. Za argumenty x obieramy dowolne liczby dla których możemy obliczyć wartości y.</p> <p>Wartości funkcji y obliczamy wstawiając kolejne argumenty x do wzoru funkcji.</p>
<b>x</b>	-2	-1	0	1	2													
<b>y</b>	5	2	1	2	5													
						<p>Wyznaczone punkty z tabelki zaznaczamy w układzie współrzędnych.</p> <p>Łącząc punkty otrzymujemy wykres funkcji.</p>												
<p>Dziedzina: <math>D : x \in R</math> Zbiór wartości: <math>y \in \langle 1, +\infty \rangle</math></p>						<p>Z wykresu odczytujemy dziedzinę i zbiór wartości.</p>												

$$c) y = \begin{cases} x-1 & \dots x \in (-\infty, -1) \\ 2x & \dots x \in \langle -1, 2 \rangle \\ 1 & \dots x \in (2, 5) \end{cases}$$

Rozwiązanie	Komentarz																												
<table border="1" style="margin-bottom: 10px;"> <tr><td><math>x \in (-\infty, -1)</math></td><td>-3</td><td>-2</td><td>-1</td></tr> <tr><td><math>y = x - 1</math></td><td>-4</td><td>-3</td><td>-2</td></tr> </table> <table border="1" style="margin-bottom: 10px;"> <tr><td><math>x \in (-1, 2)</math></td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr> <tr><td><math>y = 2x</math></td><td>-2</td><td>0</td><td>2</td><td>4</td></tr> </table> <table border="1"> <tr><td><math>x \in (2, 5)</math></td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr> <tr><td><math>y = 1</math></td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> </table>	$x \in (-\infty, -1)$	-3	-2	-1	$y = x - 1$	-4	-3	-2	$x \in (-1, 2)$	-1	0	1	2	$y = 2x$	-2	0	2	4	$x \in (2, 5)$	2	3	4	5	$y = 1$	1	1	1	1	<p>Funkcja jest określona trzema wzorami. Dla każdego wzoru sporządzamy tabelkę częściową.</p> <p>Za argumenty <math>x</math> wybieramy dowolne liczby z odpowiedniego przedziału. Końce przedziału muszą znaleźć się w tabelce.</p> <p>Wartości funkcji <math>y</math> obliczamy wstawiając kolejne argumenty <math>x</math> do wzoru funkcji.</p>
$x \in (-\infty, -1)$	-3	-2	-1																										
$y = x - 1$	-4	-3	-2																										
$x \in (-1, 2)$	-1	0	1	2																									
$y = 2x$	-2	0	2	4																									
$x \in (2, 5)$	2	3	4	5																									
$y = 1$	1	1	1	1																									
	<p>Wyznaczone punkty z tabelki zaznaczamy w układzie współrzędnych.</p> <p>Łącząc punkty otrzymujemy wykres funkcji. Musimy pamiętać, aby odpowiednio zaznaczyć końce wykresu.</p>																												
<p>Dziedzina: <math>D : x \in (-\infty, 5)</math></p> <p>Zbiór wartości: <math>y \in (-\infty, 4)</math></p>	<p>Z wykresu odczytujemy dziedzinę i zbiór wartości.</p>																												

Przykład 2.1.4. Funkcja podana jest wzorem  $f(x) = x^2 + 2x - 3$ . Oblicz  $f(-1)$ ,  $f(0)$ ,  $f(a+1)$

Rozwiązanie	Komentarz
$f(-1) = (-1)^2 + 2 \cdot (-1) - 3 = 1 - 2 - 3 = -4$	<p>Wartość funkcji dla argumentu <math>-1 : f(-1)</math> obliczamy wstawiając do wzoru funkcji za <math>x</math>, <math>-1</math>.</p>
$f(0) = 0^2 + 2 \cdot 0 - 3 = -3$	<p>Wartość funkcji dla argumentu <math>0 : f(0)</math> obliczamy wstawiając do wzoru funkcji za <math>x</math>, <math>0</math>.</p>
$\begin{aligned} f(a+1) &= (a+1)^2 + 2(a+1) - 3 = \\ &= a^2 + 2 \cdot a \cdot 1 + 1^2 + 2a + 2 - 3 = \\ &= a^2 + 2a + 1 + 2a + 2 - 3 = \\ &= a^2 + 4a \end{aligned}$	<p>Wartość funkcji dla argumentu <math>a+1 : f(a+1)</math> obliczamy wstawiając do wzoru funkcji za <math>x</math>, <math>a+1</math>.</p> <p>Wykonując działanie <math>(a+1)^2</math> stosujemy wzór skróconego mnożenia</p> $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

**Przykład 2.1.5.** Sprawdź, który z punktów  $A = (-1,0)$ ,  $B = (0,3)$ ,  $C = (1,-1)$  należy do wykresu

funkcji  $y = \frac{x+1}{2x}$ .

Rozwiązanie	Komentarz
$0 = \frac{-1+1}{2 \cdot (-1)}$ $0 = \frac{0}{-2}$ $0 = 0$ <p>Odp. Punkt A należy do wykresu funkcji.</p>	<p>Sprawdzając, czy punkt <math>A = (-1,0)</math> należy do wykresu danej funkcji, podstawiamy jego współrzędne do wzoru tej funkcji :</p> $x = -1, y = 0$ <p>Po obliczeniach otrzymujemy tożsamość.</p>
$3 = \frac{0+1}{2 \cdot 0}$ $3 = \frac{1}{0}$ <p>Odp. Punkt B nie należy do wykresu funkcji.</p>	<p>Sprawdzając, czy punkt <math>B = (0,3)</math> należy do wykresu danej funkcji, podstawiamy jego współrzędne do wzoru tej funkcji : <math>x = 0, y = 3</math></p> <p>Po obliczeniach otrzymujemy z prawej strony równości wyrażenie sprzeczne : <math>\frac{1}{0}</math>.</p> <p>Dla 0 funkcja nie ma wartości.</p>
$-1 = \frac{1+1}{2 \cdot 1}$ $-1 = \frac{2}{2}$ $-1 = 1$ <p>Odp. Punkt C nie należy do wykresu funkcji.</p>	<p>Sprawdzając, czy punkt <math>C = (1,-1)</math> należy do wykresu danej funkcji, podstawiamy jego współrzędne do wzoru tej funkcji :</p> $x = 1, y = -1$ <p>Po obliczeniach otrzymujemy sprzeczność.</p>

## ĆWICZENIA

Ćwiczenie 2.1.1. (2pkt.) Która tabelka przedstawia funkcję? Dla funkcji podaj jej dziedzinę i zbiór wartości.

a)

<b>x</b>	3	3	4	5
<b>y</b>	1	2	3	4

b)

<b>x</b>	2	3	4	5
<b>y</b>	4	2	3	4

c)

<b>x</b>	2	3	4	5
<b>y</b>	-	2	3	4

### schemat oceniania

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Podanie które tabelki są funkcjami z uzasadnieniem.	1
2	Dla funkcji podanie dziedziny i zbioru wartości.	1

Ćwiczenie 2.1.2. (2pkt.) Funkcja jest określona za pomocą zbioru par

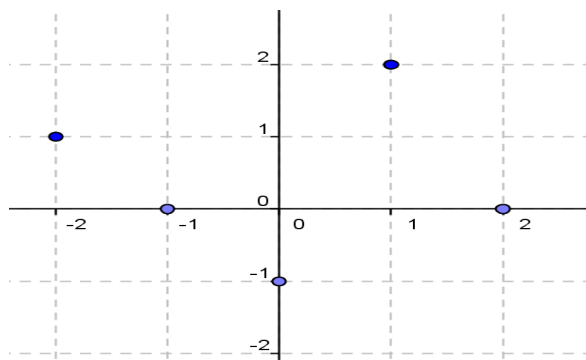
$$F = \{(x, y) : x \in N \wedge y \in N \wedge -3 \leq x \leq 3 \wedge y = x^2\}$$

Przedstaw ją za pomocą tabelki i podaj jej dziedzinę i zbiór wartości:

### schemat oceniania

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Podanie tabelki.	1
2	Podanie dziedziny i zbioru wartości.	1

Ćwiczenie 2.1.3. (1pkt.) Funkcję opisaną wykresem, przedstaw za pomocą tabelki:



### schemat oceniania

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Podanie tabelki.	1



Ćwiczenie 2.1.4. (4pkt.) Narysuj wykres funkcji podanej wzorem  $y = \begin{cases} 6 \dots \dots \dots x \leq -3 \\ -2 \dots \dots -3 < x \leq 1. \\ x + 1 \dots \dots x > 1 \end{cases}$

Z wykresu odczytaj dziedzinę i zbiór wartości.

**schemat oceniania**

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Podanie tabelek, za pomocą których zostanie narysowany wykres funkcji.	1
2	Narysowanie wykresu funkcji.	1
3	Podanie dziedziny funkcji.	1
4	Podanie zbioru wartości funkcji.	1

Ćwiczenie 2.1.5. (3pkt.) Funkcja podana jest wzorem  $f(x) = -x^2 + x$ .

Oblicz wartości funkcji dla argumentów:  $-1, 2, a + 2$

**schemat oceniania**

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Podanie wartości funkcji dla argumentu $-1$ .	1
2	Podanie wartości funkcji dla argumentu $2$	1
3	Podanie wartości funkcji dla argumentu $a + 2$	1